Soluciones a los ejercicios de evaluación

1. Estúdiese la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=E(x^2)$ (parte entera de x^2) para todo $x\in\mathbb{R}$.

Solución. Claramente $f=E\circ\varphi$ donde $\varphi(x)=x^2$. Puesto que φ es continua en todo punto y la función parte entera es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, deducimos por el teorema de composición de funciones continuas, que f es continua en todo punto $a\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi(a)=a^2\notin\mathbb{Z}$. Es decir, f es continua en $\mathbb{R}\setminus B$ donde $B=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{-\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$. Los puntos de B requieren un estudio particular pues, *a priori*, no podemos asegurar que f sea discontinua en ellos.

Empecemos estudiando la posible continuidad de f en 0. Es claro que para $-1<x<1$ tenemos que $0\leqslant x^2<1$ por lo que $f(x)=0$ para todo $x\in]-1,1[$. Es decir, la función $f_{|]-1,1[}$ (*restricción de f al intervalo* $]-1,1[$) *es la función constante igual a* 0 y por tanto $f_{|]-1,1[}$ *es continua*. Como el intervalo $]-1,1[$ *es abierto* deducimos, *por el teorema de localización* que f es continua en $]-1,1[$ y, en particular, *f es continua en* 0.

Consideremos ahora un punto de la forma $\sqrt{q}$ donde $q\in\mathbb{N}$ (fijo en lo que sigue). Para todo $x\in]\sqrt{q-1},\sqrt{q}[$ se tiene que $q-1<x^2<q$ por lo que $f(x)=q-1$. Cualquiera sea $\delta>0$, hay puntos $x\in]\sqrt{q}-\delta,\sqrt{q}+\delta[\cap]\sqrt{q-1},\sqrt{q}[$ para los que $|f(\sqrt{q})-f(x)|=|q-(q-1)|=1$, por lo que tomando $\varepsilon_o<1$ deducimos que f no es continua en $\sqrt{q}$.

De forma análoga se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $-\sqrt{q}$ donde $q\in\mathbb{N}$.

2. Probar que si f es continua en a entonces también lo es $|f|$. Dar un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

Solución. Todo lo que se necesita es la desigualdad $\big||u|-|v|\big|\leqslant|u-v|$. En nuestro caso tenemos:

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$$

Supuesto que f es continua en a, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ y $x\in dom(f)$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ lo que, por la desigualdad anterior, implica que $\big||f(x)|-|f(a)|\big|<\varepsilon$ y, por tanto, $|f|$ es continua en a.

La función dada por $f(x)=1$ si $x\geqslant 0$ y $f(x)=-1$ si $x<0$, es discontinua en 0 pero $|f|$ es continua en 0.

3. Sean A,B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a\leqslant b$ para todo $a\in A$ y para todo $b\in B$. Probar que $\sup A\leqslant\inf B$.

Solución. Sea C el conjunto de los mayorantes de A. La hipótesis nos dice que $B\subseteq C$. En consecuencia $\sup(A)=\min(C)$ es un minorante de B y por tanto, $\sup(A)$ será menor o igual que el máximo minorante de B, es decir, $\sup(A)\leqslant\inf(B)$.

4. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos:

$$A-B=\{a-b:a\in A,\ b\in B\};\ \ AB=\{ab:a\in A,\ b\in B\}$$

Pruébese que $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$ y, supuesto que $A\subset\mathbb{R}^+$ y $B\subset\mathbb{R}^+$, probar que $\sup(AB)=\sup A\sup B$.

Solución. Sea $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \text{ínf}(B)$, $\gamma = \sup(A - B)$. Cualesquiera sean $a \in A, b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant b$. En consecuencia $a - b \leqslant \alpha - \beta$, lo que prueba que $\alpha - \beta$ es un mayorante de $A - B$, y por tanto $\gamma \leqslant \alpha - \beta$.
Probaremos ahora que $\alpha - \beta \leqslant \gamma$. Cualesquiera sean $a \in A, b \in B$ se tiene que $a - b \leqslant \gamma$, es decir, $a \leqslant b + \gamma$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número $b + \gamma$ es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant b + \gamma$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha - \gamma \leqslant b$, es decir, $\alpha - \gamma$ es un minorante de B, y por tanto $\alpha - \gamma \leqslant \beta$, es decir, $\alpha - \beta \leqslant \gamma$.

Sea $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \sup(B)$, $\mu = \sup(AB)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$, $b \leqslant \beta$. En consecuencia, por ser $a > 0, b > 0$, $ab \leqslant \alpha\beta$, lo que prueba que $\alpha\beta$ es un mayorante de AB y por tanto $\mu \leqslant \alpha\beta$.
Probaremos ahora que $\alpha\beta \leqslant \mu$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $ab \leqslant \mu$, esto es, $a \leqslant \mu/b$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número μ/b es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant \mu/b$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \mu/\alpha$, es decir,γ/α es un mayorante de B, y por tanto $\beta \leqslant \mu/\alpha$, es decir, $\alpha\beta \leqslant \mu$.